JIDeTEV
Jornadas de Investigación y Desarrollo Tecnológico
Extensión, Vinculación y Muestra de la Producción

La Parábola - Hacia un Mismo Objetivo desde Miradas Distintas

Ibarra, María del Carmen [a], Rivero, Luisa Leonor *, [a]

[a] *Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Misiones (UNaM), Oberá, Misiones, Argentina.*
ibarra@fio.unam.edu.ar, rivero@fio.unam.edu.ar

Resumen

Las Asignaturas Cálculo 1 y Algebra y Geometría Analítica además de dictarse en simultáneo en el primer año de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Misiones, coinciden en sus currículas con algunos temas, pero abordados desde distintas perspectivas. En este trabajo se ha seleccionado la Parábola, la cual se presenta como Función y como Lugar Geométrico, en Cálculo y Algebra, respectivamente. Se exponen los elementos o parámetros más relevantes de la curva, según los objetivos que se persiguen en cada Asignatura; se ofrecen técnicas alternativas para su estudio analítico y gráfico y finalmente se presenta un ejemplo de aplicación donde se aprecia que ambas perspectivas son complementarias y que ofrecen al estudiante la posibilidad de trabajar con diversos enfoques.

Palabras Clave *– Función Cuadrática, Lugar geométrico, Parábola.*

1 Introducción

Las asignaturas Cálculo 1 y Algebra y Geometría Analítica, además de ser comunes a todas las carreras del 1er año de la Facultad de Ingeniería de la UNaM y de dictarse en forma simultánea, comparten algunos temas con diferentes enfoques. Uno de estos temas es la Parábola, que se presenta como Función Cuadrática y Lugar Geométrico, en Cálculo y Algebra respectivamente.

Estos enfoques complementarios, muchas veces no llegan se ser comprendidos completamente por el estudiante, situación que se visualiza en ambas Asignaturas. Desde ésta perspectiva y con la intención de que no exista una brecha o una separación entre ambas Cátedras, se pretende que el estudiante a la hora de resolver ejercicios o situaciones problemáticas que involucran la Parábola, pueda valerse de los recursos que le brindan tanto el cálculo como el álgebra indistintamente y establecer relaciones entre los procesos algebraico, geométrico y gráfico, vinculando las diferentes representaciones a la hora de validar su respuesta y utilizar de ésta manera todos los recursos disponibles.

*Autor en correspondencia.

2 Presentación del tema en ambas Asignaturas

El estudio de la Parábola, es un tema que está dentro de la currícula de la escuela secundaria, que se vuelve a repasar en el Curso de Nivelación de Matemática para ingreso a la Facultad de Ingeniería, por lo tanto no es un tema nuevo para los estudiantes, pero su conocimiento se reduce a la forma:

$$y = a\,x^2 + b\,x + c \tag{1}$$

donde: *a*, *b* y *c* son los coeficientes del Polinomio (constantes).

Cualquier variación en la escritura de la misma no suele ser reconocida por el estudiante, por ejemplo:

$$y - a\,x^2 = 0. \qquad a\,x^2 + b\,x - y = 0 \tag{2}$$

2.1 El enfoque de la Parábola desde la perspectiva del Cálculo

En Cálculo 1, el tratamiento de la Parábola se realiza en las primeras semanas de cursado, como parte de la familia de Funciones Polinómicas, que constituyen las Funciones Algebraicas más sencillas. Se presentan los Polinomios en general, como Funciones, siendo su expresión general:

$$y = f\left(x\right) \tag{3}$$

La expresión (3) corresponde a una relación biunívoca entre dos variables, una dependiente (y) y otra independiente (x). En el caso particular de la Parábola, Polinomio de segundo grado, dicha expresión corresponde a (1). En la expresión (3) a cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*; es decir, representa una Función, cuya gráfica es una Parábola con eje paralelo al de ordenadas. En el caso que la Parábola presente su eje paralelo al de abscisas, es una curva, pero no es Función y la expresión algebraica es:

$$x = d\,y^2 + e\,y + f \tag{4}$$

donde: *d, e* y *f* son los coeficientes (constantes).

En la Parábola dada por (4), la expresión algebraica corresponde a: x = f(y); a cada valor de la variable independiente le corresponden dos valores diferentes de la variable dependiente y por lo tanto no satisface la condición de Unicidad necesaria para que una relación entre dos variables, sea considerada Función. En este caso, es posible considerar que la Curva está compuesta por dos Funciones diferentes, resultantes de despejar la variable dependiente, utilizando el doble signo (+/-) de la raíz cuadrada interviniente y así cada rama de la Parábola será una Función distinta.

En la Figura 1 se representan dos Parábolas, una con eje vertical, a la cual corresponde una expresión del tipo y = f(x), que es una Función y otra con eje horizontal, con expresión de la forma: x = f(y), que es considerada una Curva.

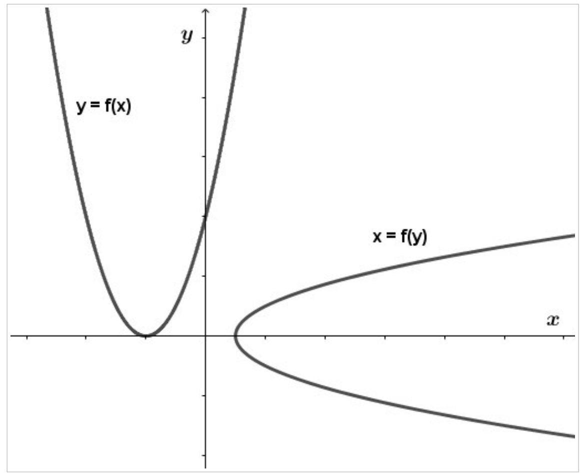


Fig. 1. Gráfica de Parábolas

Por lo tanto, desde la visión del Cálculo o Análisis Matemático, la Parábola es una Función si su expresión analítica tiene la forma (1) y el análisis que se hace de ella, es básico: Dominio, Intersecciones con los Ejes, Vértice y Concavidad. Luego, con estos elementos, se realiza la representación gráfica y a partir de allí, se determina la Imagen. Para la obtención de la Raíces o Ceros de la Función, se trabaja con la Resolvente o con factoreo de la expresión

Para la ubicación del vértice se ofrecen dos opciones:

1. Como Punto Crítico: se puede encontrar igualando a cero la primer derivada y despejando de la ecuación lineal resultante, el valor correspondiente de x_V (abscisa del vértice).

$$y = a x^2 + b x + c. \qquad y^I = 2 a x + b = 0. \qquad x_V = \frac{-b}{2a} \tag{5}$$

En este caso, el concepto que se aplica consiste en buscar el punto de la curva con pendiente nula, es decir, cuya Recta Tangente sea paralela al eje de abscisas y como se aprecia en la Fig. 1, para y = f(x), el único punto que satisface esa condición es el vértice de la Parábola.

2. Como punto medio entre las Raíces: es posible ubicar la abscisa del vértice como punto medio del segmento comprendido entre las Raíces o Ceros de la función, siempre que éstas sean Reales:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2). \qquad x_V = \frac{x_2 + x_1}{2} \tag{6}$$

donde: x_1 y x_2 son las intersecciones de la curva con el eje x.

Para expresar la Parábola en la forma dada en (6) es necesario factorizar la expresión y = f(x), luego de encontrar las Raíces, igualando a 0 la imagen de la función: f(x) = 0.

La Ordenada al Origen, intersección con el eje de ordenadas, se encuentra asignando el valor 0 a la variable independiente en (1): f(0) = c; resultando el punto (0, c).

Con las Raíces y la Ordenada al Origen, es posible realizar un croquis de la curva; aunque también es importante verificar la concavidad con el signo del coeficiente (a) del término de segundo grado en (1).

En caso que sea necesario, para relevar una gráfica más precisa, se sugiere realizar una tabla de valores, con unos pares más de puntos adicionales; pero en realidad la idea es que con la determinación de las intersecciones con los ejes coordenados, el vértice y la concavidad, el estudiante sea capaz de realizar un croquis de la Parábola.

Cabe destacar que el Análisis de Funciones, está desarrollado en detalle en el texto del autor D. Zill, libro de referencia de la Asignatura [1].

2.2 El enfoque de la Parábola desde la perspectiva del Algebra

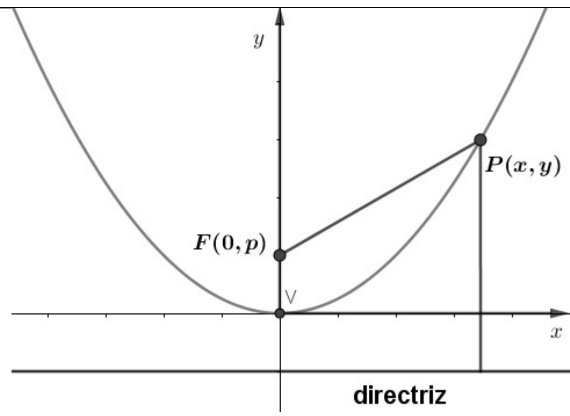
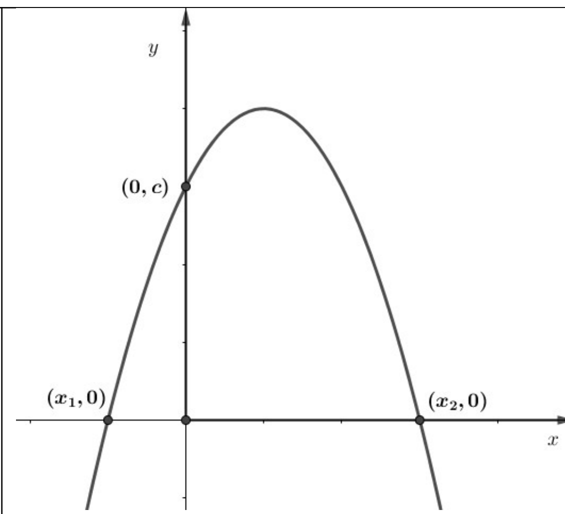
En el caso de Algebra y Geometría Analítica éste tema se desarrolla en la Unidad 2 correspondiente a las Curvas Cónicas, las cuales se definen a partir del concepto de Lugar Geométrico; se encuentran la ecuaciones respectivas, según sean simétricas respecto del eje x o del eje y, se realizan las gráficas correspondientes y se analizan los elementos de las mismas, pero también se pueden analizar éstas curvas a partir de la ecuación de segundo grado, completando cuadrados, llevándola a la forma canónica y a partir de ésta determinar de qué curva se trata.

El desarrollo de la Parábola y demás Cónicas, se puede encontrar en los materiales didácticos elaborados por la Cátedra [2].

En éste trabajo se desarrolla la Parábola simétrica respecto del eje y. En el Cuadro 1 se hace un análisis comparativo entre los enfoques de ambas Asignaturas:

Cuadro1: Análisis comparativo del estudio de la Parábola entre Cálculo y Algebra.

	ALGEBRA	CÁLCULO
DEFINICION	Dados en el plano una recta fija, llamada directriz y un punto fijo, llamado foco, no perteneciente a ella, se define la parábola como los puntos del plano que equidistan del foco y de la directriz: $P = \{P : d(P, F) = d(P, d)\}$	Se presenta la Parábola como la Función Polinómica de segundo grado: $y = ax^2 + bx + c$ cuyo dominio son todos los reales
ELEMENTOS	F: foco Eje de simetría: recta que contiene al foco y es perpendicular a la recta directriz *d:* recta directriz V: vértice - punto medio entre el foco y la recta directriz p: parámetro de la parábola (distancia al vértice del foco o a la recta directriz) LR: lado recto cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje de simetría	Raíces o Ceros: Se obtienen anulando la función: $f(x) = 0$ Esta curva puede cortar al eje de abscisas en dos puntos, en uno sólo ó en ninguno; según resulte de la aplicación de la Resolvente: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Ordenada al Origen: Se obtiene anulando x: $f(0) = c$ Vértice: Se puede obtener como punto medio del segmento que une las Raíces o como el único punto de la curva que presenta Recta Tangente Horizontal.

<table>
<tr>
<td>G
R
A
F
I
C
A</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>E
C
U
A
C
I
O
N</td>
<td>

$$d(P,F)=d(P,d)$$

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=y+p$$

$$\left(\sqrt{(x)^2+(y-p)^2}\right)^2=(y+p)^2$$

$$(x)^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

desarrollando cuadrados

$$x^2+y^2-2yp+\cancel{p^2}=\cancel{y^2}+2\cancel{y}p+p^2$$

$$x^2=4py$$

Si el vértice de la Parábola no pasa por el origen V(h,k)

$$(x-h)^2=4p(y-k)$$

</td>
<td>

La Parábola se puede presentar en forma de Polinomio de segundo grado, como suma algebraica de términos cuadráticos, lineales y constantes:

$$y=ax^2+bx+c$$

También se puede expresar como producto de dos binomios lineales, donde los términos independientes corresponden a las Raíces de la Función:

$$y=a(x-x_1)(x-x_2)$$

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>P
R
O
P
I
E
D
A
D
E
S</td>
<td>

Simetría:

$$F(x,y) = F(-x,y)$$

La Parábola es <u>simétrica respecto del eje y</u> , a igual valor de y se obtienen dos valores de x.

Valores excluidos:

$$F(x,y) \neq F(-x,-y)$$

La Parábola No es simétrica respecto del origen de coordenadas

Relaciones geométricas: pasa por el origen de coordenadas si:

$$y = 0 \rightarrow x = 0$$

por tanto P(0,0) pertenece a la curva.

El coeficiente que multiplica a la variable y se denomina Lado Recto:

$$LR = 4p$$

Si se verifica:

$$p > 0 \rightarrow y > 0$$

las ramas de la Parábola se abren hacia arriba

Si se verifica:

$$p < 0 \rightarrow y < 0$$

las ramas de la Parábola se abren hacia abajo

</td>
<td>

Dominio: todos los reales: (-∞, ∞)

Imagen:

$$(-\infty,\ y_V)\ \ ó\ \ (y_V,\infty)$$

según sea cóncava hacia abajo o arriba, respectivamente.

Concavidad:

$$y = ax^2 + bx + c$$

a > 0 : Cóncava hacia arriba
a < 0: Cóncava hacia abajo

Vértice: es el punto sobre la Curva donde la pendiente de la Recta Tangente es nula. Es el único Extremo (Absoluto y Relativo) de la Curva.
El vértice divide la Curva en dos ramas perfectamente simétricas, una es creciente y la otra, decreciente.

No presenta **Puntos de Inflexión**, dado que no cambia su concavidad.

Es **Continua y Derivable** en todo su dominio (como todo Polinomio).

No presenta **Asíntotas** (verticales ni horizontales).

</td>
</tr>
</table>

3 Ejemplo de aplicación

A continuación, se plantea una situación problemática, la cual involucra una función cuadrática y que puede ser resuelta de diferentes maneras, dos de las cuales se presentan.

Disponemos de 120m de cerca para delimitar un terreno rectangular, y podemos elegir las dimensiones del terreno. ¿Qué medidas deberíamos escoger para que el terreno sea lo más grande posible?

3. 1 Resolución desde el punto de vista del Cálculo

Se enfoca el problema desde el Cálculo Diferencial, como un Problema de Optimización, dado que se busca maximizar el área. Se detallan a continuación cada uno de los pasos del proceso:

Paso 1: Leer detenidamente el problema, las veces que sean necesarias, hasta comprenderlo completamente; lo cual implica tener en claro cuáles son los datos, cuáles las incógnitas y que solicita el problema, es decir, en qué consiste resolverlo.

Paso 2. Croquis. Se representa el terreno como un rectángulo y se asigna nombres a ambos lados, como se indica en la Figura 2:

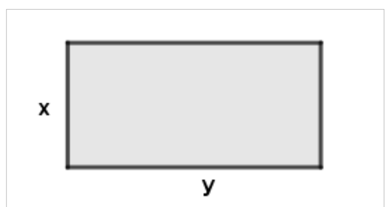


Fig. 2. Croquis del terreno

Paso 3. Datos y Restricciones. La limitación son los 120 metros de alambre disponibles, para recorrer todo el Perímetro (P):

$$P = 2(x + y) = 120m. \qquad x + y = 60m \tag{7}$$

Paso 4. Función Objetivo. Representa la magnitud que debe ser optimizada, que en este caso corresponde a la superficie del terreno (S):

$$S = x\,y \tag{8}$$

Luego es necesario hallar el Punto Crítico, es decir el Máximo Relativo de la función superficie, en este caso. Pero para realizar la derivada, es necesario que haya una sola variable independiente, mientras que (8) contiene dos variables. Para resolver esta situación, se utiliza la restricción del problema planteada en la última igualdad de (7), de donde se obtiene:

$$y = 60 - x. \qquad S = x\,(60 - x) \tag{9}$$

Aquí se aprecia que S(x) es una Función cuadrática, cóncava hacia abajo, y por lo tanto su gráfica será una Parábola que presenta un Máximo coincidente con el Vértice.

Paso 5. Obtención del Extremo relativo (máximo) de la Superficie. Es necesario derivar respecto de x, la última igualdad de (9), igualar a cero y de allí, despejar el valor de x:

$$\frac{dS}{dx} = 60 - 2x = 0. \qquad x = 30\,m \rightarrow y = 30\,m \tag{10}$$

Una vez obtenido el valor de x, se reemplaza en (7) para encontrar la dimensión del otro lado del terreno.

Paso 6. Análisis de la solución .Dado que ambos lados deben tener 30 metros para lograr el área máxima, significa que el rectángulo es en realidad, un cuadrado. Esto demuestra que, de todos los rectángulos, con perímetro dado, el de mayor área es el cuadrado. También resulta interesante observar que la Parábola que representa a S(x) no tiene como dominio todos los reales, sino solamente el intervalo (0, 60), para el cual tiene sentido este problema. En la Figura 3 se observa que dicho dominio (acotado) corresponde al arco de Parábola cuya imagen es positiva, condición indispensable dado que representa una superficie. Para encontrar finalmente, la superficie del terreno, solo resta reemplazar las dimensiones del mismo en (8), resultando S = 900 m². Así el punto (30, 900) corresponde al vértice de la Parábola y sus coordenadas representan la dimensión de los lados del cuadrado y la superficie total, respectivamente.

En este tipo de situaciones, tan importante como el desarrollo analítico, es la interpretación en contexto del resultado.

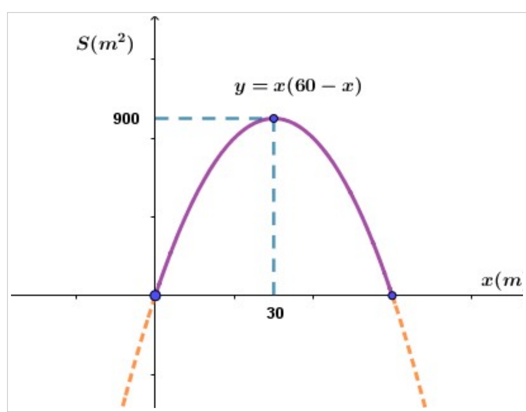


Fig. 3. Interpretación gráfica de la solución

3. 1 Resolución desde el punto de vista del Algebra

Análisis de la situación: Se representa el terreno como un rectángulo donde se pueden hacer intentos con distintas medidas de los lados, ejemplificando que, aunque tengan el mismo perímetro el área no va a ser la misma, la pregunta sería entonces *¿qué medidas deberíamos escoger para que el terreno sea lo más grande posible*?

Datos: se representa el terreno como un rectángulo de ancho x y de alto y, cuyo perímetro debe ser de 120 metros:

$$P = 2x + 2l = 120. \qquad x + l = 60 \tag{11}$$

Siendo el área: A = x.l, resulta una ecuación cuadrática:

$$A = x\,(60 - x) = -x^2 + 60\,x \tag{12}$$

Completando cuadrados se obtiene:

$$y = -x^2 + 60x + 30^2 - 30^2 = -(x-30)^2 - 900 \tag{13}$$

Y llevándola a la forma canónica resulta:

$$(x-30)^2 = -(y-900) \tag{14}$$

La representación de la ecuación (14) corresponde la Parábola Figura 4, con eje de simetría paralelo al eje *y*, abierta hacia abajo, con V(30,900); luego el área que tiene que ver con ésta función, tiene un punto máximo, que coincide con el vértice de la Parábola, entonces *¿cuánto tiene que valer x para obtener el máximo del área del terreno*?, en definitiva lo que se busca es el vértice de la Parábola. Si x = 30 m, entonces, l = 60 – 30 = 30 y el terreno se reduce a un cuadrado cuya área máxima será de $900m^2$.

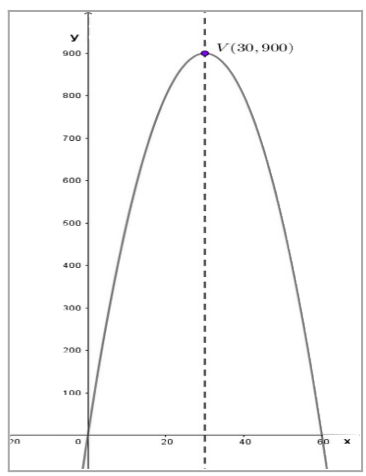


Fig. 4. Parábola con eje de simetría vertical

Como se puede apreciar éste tipo de problemas permite al estudiante movilizar los diferentes conocimientos desarrollados en las dos Asignaturas, pudiendo llegar al mismo resultado por caminos distintos y ambos recorridos involucran el análisis algebraico y gráfico. Respecto a la importancia de vincular estas representaciones, plantea Arsac (1992) [3]:

La práctica geométrica consiste en un ida y vuelta constante entre un texto y un dibujo. En consecuencia, analizar los datos con los que se debe construir una figura, determinar si la construcción es posible o no, establecer relaciones entre los datos conocidos y el dibujo a obtener, etc, resultan una experiencia sumamente útil en el camino hacia entender a una figura como el conjunto de las relaciones que la caracterizan y que pueden ser enunciadas en un texto.

4 Conclusiones

La Parábola es tratada desde dos miradas distintas como Función Cuadrática y Lugar Geométrico, ambos enfoques son complementarios y juntos logran una visión integral y completa de la Curva, que no siempre alcanza a ser apreciada por el estudiante, quien con frecuencia tiende a compartimentar los conocimientos y técnicas desarrollados en ambas Asignaturas.

Existen muchos ejemplos de aplicación en forma de situaciones problemáticas, especialmente apropiados para ser resueltos desde ambos enfoques; la metodología que utilice el estudiante para resolverlos va a depender de las técnicas o herramientas con las que se sienta más cómodo o más seguro. Por ello es fundamental que ambas Cátedras asuman el compromiso de permitir y posibilitar al estudiante que sea libre de elegir la técnica para abordar la resolución de ejercicios o situaciones problemáticas en estos temas comunes.

Referencias

[1] D. Zill, “Cálculo de una Variable,” 4ta ed., McGraw-Hill, 2011.

[2] L. Rivero, “Apuntes de Cátedra: Cuaderno II cónicas y cuádricas” para ser publicado

[3] H. Itzcovich, “Iniciación al estudio didáctico de la Geometría”, Buenos Aires , ARG. ,2005,pp.3.